

Problema P10

Definizione 1. Una **topologia** su di un insieme arbitrario X è una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X (detti “insiemi aperti”) che goda delle seguenti proprietà: (i) X e $\emptyset$ appartengono a $\mathcal{A}$; (ii) un’unione arbitraria di elementi di $\mathcal{A}$ è un elemento di $\mathcal{A}$; (iii) un’intersezione finita di elementi di $\mathcal{A}$ è un elemento di $\mathcal{A}$. I complementari degli insiemi aperti si chiamano insiemi chiusi. Uno **spazio topologico** è una coppia $(X, \mathcal{A})$ con X insieme arbitrario e $\mathcal{A}$ è una topologia su X .

Es 1. Dimostrare che un’unione arbitraria di chiusi è chiusa e che un’intersezione finita di chiusi è chiusa. Dare esempi che mostrino che non è vero che un’intersezione arbitraria di aperti è aperta e un’unione arbitraria di chiusi è chiusa.

Definizione 2. Dato un qualunque insieme X , una funzione $d(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ che verifichi:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & d(x, y) \geq 0 \quad \text{e} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y, \\ \text{(ii)} \quad & d(x, y) = d(y, x), \\ \text{(iii)} \quad & d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y); \end{aligned} \tag{1}$$

si chiama **distanza** o **metrica**. Dato $x \in X$ e $r > 0$ si denota $B(x, r) := \{y \in X : d(y, x) < r\}$ la sfera (aperta) di centro x e raggio r . Un insieme X dotato di metrica prende il nome di **spazio metrico**.

Es 2. Sia X uno spazio metrico con metrica d e sia $\mathcal{A}$ la famiglia di sottoinsiemi di X tali che $\forall A \in \mathcal{A}$ e $\forall x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq A$. Dimostrare che $\mathcal{A}$ è una topologia (tale topologia prende il nome di topologia indotta dalla metrica d).

Definizione 3. Sia X uno spazio topologico con topologia $\mathcal{A}$ e sia Y un sottoinsieme di X . Sia $\mathcal{A}_Y$ la famiglia di sottoinsiemi A' di Y tali che esiste $A \in \mathcal{A}$ per cui $A' = A \cap Y$.

Es 3. Dimostrare che $\mathcal{A}_Y$ definisce una topologia su Y (tale topologia prende il nome di topologia indotta o topologia relativa).

Definizione 4. Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme E di X si dice **sconnesso** se esistono due insiemi aperti A e B tali che se $A_E := A \cap E$ e $B_E := B \cap E$ allora

$$A_E \neq \emptyset, \quad B_E \neq \emptyset, \quad A_E \cap B_E = \emptyset, \quad E = A_E \cup B_E.$$

Un insieme è **connesso** se non è sconnesso.

Definizione 5. Siano (X, d) e (Y, d') due spazi metrici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **continua** in $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ per ogni $x \in X$ tale che $d(x, x_0) < \delta$; f si dice **continua su** $A \subseteq X$ se è continua in ogni punto x di A .

Una curva γ in X è una funzione continua $\gamma : [a, b] \rightarrow X$. Se γ è iniettiva i punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ si chiamano estremi di γ .

Un insieme $E \subset X$ si dice connesso per curve (o per archi) se per ogni $x, y \in E$ esiste una curva (iniettiva) γ a valori in E con estremi x e y .

Es 4. Dimostrare che un sottoinsieme aperto e connesso E di uno spazio metrico X è connesso per curve.

Es 5. Sia $E_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$ e $E_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq \frac{1}{\pi}, y = \sin \frac{1}{x}\}$. Sia $E := E_0 \cup E_1$.

Dimostrare che E è chiuso e che è connesso ma non è connesso per curve.

Dare un esempio di insieme connesso, non connesso per archi che non sia chiuso.